Journal of the Faculty of Arts (JFA)

Volume 80 | Issue 2 Article 16

4-1-2020

Indirect proof and the problem of circumvention and normative proofs in the natural deduction of classical logic

Hany Mubarez Hassan Ali eazazaa
Lecturer in the Department of Philosophy - Ain Shams Arts

Follow this and additional works at: https://jfa.cu.edu.eg/journal

Recommended Citation
eazazaa, Hany Mubarez Hassan Ali (2020) "Indirect proof and the problem of circumvention and normative proofs in the natural deduction of classical logic," *Journal of the Faculty of Arts (JFA)*: Vol. 80: Iss. 2, Article 16.
DOI: 10.21608/jarts.2020.100062
Available at: https://jfa.cu.edu.eg/journal/vol80/iss2/16

This Original Study is brought to you for free and open access by Journal of the Faculty of Arts (JFA). It has been accepted for inclusion in Journal of the Faculty of Arts (JFA) by an authorized editor of Journal of the Faculty of Arts (JFA).

البرهان غير المباشر ومشكلة التفاف البراهين ومعياريتها في الاستنباط الطبيعي للمنطق الكلاسيكى(*)

د. هانى مبارز حسن على عزازى

مدرس بقسم الفلسفة – آداب عين شمس

الملخص

تعد مشكلة التفاف(١) detour البراهين في أنسقة الاستنباط الطبيعى مشكلة في غاية الأهمية، وهى مشكلة لا نجد مثيلًا لها في الأنسقة الأكسيوماتيكية. وهى تعنى، على نحو مبسط، تكرار خطوات البرهان، وهو أمر معيب من ناحية اشتقاق البراهين. لقد أدرك جنتسن G. Gentzen صاحب أول نسق في الاستنباط الطبيعى تلك المشكلة، وهو قد استطاع حلها بالنسبة لأنسقة الاستنباط الطبيعى الحدسية دون الكلاسيكية، من خلال مبرهنته على معيارية Haupstaz / Normalization البراهين الحدسية، أى البرهنة على إمكانية حذف التفاف البراهين. ويعود الفضل إلى داج برافيتس D. Prawitz فى وضع أول برهان على معيارية براهين منطق الاستنباط الطبيعى الكلاسيكى من خلال استخدام قاعدة البرهان غير المباشر. في هذا البحث سوف نتساءل عن قدرة تلك القاعدة على ذلك حقًا، وإمكانية وجود قاعدة بديلة]

الكلمات المفتاحية: برهان غير مباشر– التفاف البراهين– استنباط طبيعى–منطق حدسى– قانون بيرس

[**Abstract**:

The problem of the detour of proofs in natural deduction systems is a serious problem. We can not find a counterpart for this problem in axiomatic systems. It means, roughly speaking, repetition to the lines or steps of proof. This is a fault from a derivative point of view. G. Gentzen, the first logician to put a calculus for natural

(*) **مجلة كلية الآداب جامعة القاهرة المجلد (٨٠) العدد (٣) أبريل ٢٠٢٠**

deduction, knew this problem very well, he even could solve it in respect to intuitive natural deduction systems but not to classical ones. He solved that problem by his Haupstaz or Normalization theorem for intuitive proofs, i.e. proving the possibility of eliminating the detours in proofs. It was Dag Prawitz who put the first proof of the normalization of proofs in natural deduction for classical systems by indirect proof rule. In this paper, I should scrutinize the ability of that rule of doing what wanted from it to do, and if there be an alternative one for it.]

عناصر البحث

١. تمهيد.

٢. نسق استنباط طبيعى وبعض التعريفات.

٣. جنتسن والتفاف البرهان ومعياريته في الاستنباط الطبيعى.

٤. برافيتس والبرهان غير المباشر لأنسقة الاستنباط الطبيعى الكلاسيكية.

٥. ما بعد برافيتس وإمكانية الاستغناء عن البرهان غير المباشر.

٦. خاتمة

١. تمهيد

الاستنباط الطبيعى Natural Deduction هو زمرة الأنسقة المنطقية التي تشيد حسابها المنطقى طبقًا لفئة من قواعد الاستنتاج دون بديهيات[٢]، فهى أنسقة تدرس الاستدلال من خلال الفروض. إن فكرة وضع قواعد للاستدلال من خلال الفروض، مُحصت منطقيًا بداءة على يد ستانيسلاو ياسكوفسكى Stanislaw Jaskowski (١٩٠٦–١٩٦٥) وجيرارد جنتسن Gerahrd Gentzen (١٩٠٩–١٩٤٥) في الوقت نفسه منذ ثلاثينيات القرن المنصرم (Pelletier, J. F. & Hazen, P. A. 2012, p. 347) وهو ما أفضى إلى ظهور أنسقة الاستنباط الطبيعى في البرهان. لقد كان تناول ياسكوفسكى للاستدلال الفرضى تناولًا خطيًا، بمعنى أنه يضع قواعد الاستدلال في خطوات رأسية متتابعة (Ibid., pp. 347-350)، وهو ما يعرف بالبعد الواحد في رسم خطوات الاستدلال، يكون الاستدلال فيه متتابعة sequence من السطور[٣]. هذا الاتجاه في رسم البرهان

أخذه تطور أنسقة الاستنباط الطبيعى على يد ويلارد كواين W.V. Quine (١٩٠٨-٢٠٠٠) وباتريك سبز P. Suppes (١٩٢٢-١٩١٤) وفريدريك فيتش F.B.Fitch (١٩٠٨-١٩٧٨) (Ibid., pp. 352-354) وأصبحت أنسقة الاستنباط الطبيعى أنماطًا تعرف بأسماء هؤلاء الرواد. أما نمط جنتسن فاتخذ بعدًا ثنائيًّا[٤]؛ بمعنى أنه يعرض لخطوات الاستدلال في صورة شجرة[٥] (Ibid.,p. 350) [٦]. لقد كان هدف جنتسن من وضع الاستنباط الطبيعى هو أن يقدم نسقًا منطقيًّا يتفق وخطوات الاستنتاج في الرياضيات من جهة، وأن يكون أساسًا للمنطق الحدسى intuitionistic يمكن بإضافة بعض الصيغ له الانتقال منه إلى المنطق الكلاسيكى من جهة أخرى. ولقد انماز بعد جنتسن الثنائى الشجرى بالأصالة، إذ إنه يكشف عن صفات في البرهان لا يمكن إدراكها من خلال العرض الخطى لخطوات الاستدلال، منها: "أن الافتراضات هى الصيغ التى تقع على قمة الشجرة بحيث نستطيع من خلالها رؤية أية صيغة تستند على الأخرى، ويمكن كذلك البرهنة على أنه يمكن لاشتقاقين أن يؤلفا اشتقاقًا واحدًا...وأنه يمكن عمل تباديل لترتيب تطبيق القواعد" (von Plato, J. 2012b, pp. 324-325). ولعل أهم خاصتين للبرهان كشف عنهما جنتسن هما خاصتا التفاف roundabout or detour البرهان ومعياريته normalization. والتفاف البرهان بصورة عامة يعنى وجود خطوة ليس لها ضرورة، أما معيارية البرهان فتعنى انتفاء الخطوات غير الضرورية[٧]، وهو الأمر الذى لا تكشف عنه بوضوح الطريقة الخطية في عرض البراهين. لقد كان التحدى الذى واجه جنتسن هو كيفية الانتقال من المنطق الحدسى إلى المنطق الكلاسيكى دون التفاف فى البراهين بسبب القواعد. لذا فقد عمل على البرهنة على معيارية نسقه في الاستنباط الطبيعى سواء أكان حدسيًّا أم كلاسيكيًّا[٨]؛ أى إمكانية حذف التفافات البراهين عن طريق خطوات معينة. لقد نجح جنتسن في ذلك بالنسبة إلى المنطق الحدسى، فلقد اكتُشف مؤخرًا ذلك البرهان بخط يده[٩]. أما بخصوص المنطق الكلاسيكى فلم يقدم جنتسن برهانًا على معياريته. إلا أن

المناطقة حاولوا ذلك بعد منه، ولعل أهمهم في ذلك الفيلسوف وعالم المنطق السويدى داج برافيتس D. Prawitz (١٩٣٦–) ومدرسته. ولقد استند أغلب هؤلاء المناطقة إلى قاعدة البرهان غير المباشر indirect proof، وهى قاعدة الرد إلى المحال ad absurdum المشهورة.

بناء على ما سبق، تبدو أهمية الأسئلة التالية: ١) هل يمكن فعلًا لتلك القاعدة أن تحفظ معيارية البراهين في الاستنباط الطبيعى للمنطق الكلاسيكى؟ ٢) وما هو التعقل الذى يقف خلف تلك المحاولة؟ ٣) وهل هذا الحفظ بكافٍ؟ ٤) وإن كانت الإجابة بلا فهل ثمة قاعدة بديلة؟ هذا ما سنحاول الإجابة عنه في هذا البحث، فسنحاول أن نبين كيف تحفظ قاعدة البرهان غير المباشر لدى برافيتس ومدرسته معيارية البراهين وما هو التعقل الذى يقف خلف محاولة مدرسته، أما الإجابة عن السؤالين الآخرين فسنستعين بمقاربة عالم المنطق بى. جى. سيلدين P. G. Seldin للإجابة عنهما. ومن أجل كل ذلك؛ سوف ننشىء بداية –في القسم الثانى من هذا البحث– نسقًا للاستنباط الطبيعى (هو نسق جنتسن في الحقيقة)، موضحين من خلاله بعض المعانى المنطقية المهمة المستخدمة في البحث، لنعرض بعد ذلك – في القسم الثالث – لتناول جنتسن لمعيارية البراهين والتفافها (في المنطق الكلاسيكى بخاصة)، ثم نعرض في القسم الرابع لحل برافيتس – من خلال تبنى البرهان غير المباشر، ثم نعرض – في القسم الخامس– تطور هذا الحل على يد عالمى المنطق إيه. سايدرز A. Siders وجى. فون بلاتو J. von Plato، منتهين من جهة إلى توضيح إمكانية الاستغناء عن البرهان غير المباشر بفضل عمل عالمى المنطق الأمريكى إتش. بى. كيورى H.B. Curry (١٩٠٠–١٩٨٢) وسيلدين، وإلى مدى كفاية هذا الاستغناء من جهة أخرى. وأخيرًا تأتى الخاتمة لنجمل نتائج البحث فيها.

٢. نسق استنباط طبيعى وبعض التعريفات

لننشىء بداية نسقًا استنباطيًّا طبيعيًّا بقواعد جنتسن للاستنتاج (نسقًا على النمط الجنتسنى). يعد معجم هذا النسق، أو تعد قواعد تكوينه مثل أغلب قواعد

تكوين الأنسقة الشائعة، فيما عدا احتوائه على ثابت التناقض ⊥ بوصفه عبارة ذرية، واحتوائه أيضًا على الإجراءات أو الروابط المنطقية الأربعة (فيما عدا النفى إذا كان منطقًا موجبًا (انظر ما يلى)) الشائعة (العطف، والانفصال الضعيف)، الشرط، والنفى) وعليه فهو يطلق عليه المنطق الممتلئ full.

أما قواعد تحويل النسق أو قواعده للاستنتاج (**في صورة شجرية**) ستكون كما يلى، علمًا بأن قواعد التقديم على اليمين ويرمز لها بالحرف **تق** يتلوه الإجراء المنطقى، أما قواعد الحذف فهى على اليسار ويرمز لها بالرمز **ح** يتلوه الإجراء المنطقى (Genzen, G. 1934, p. 77):

(ت&) $$\dfrac{\text{ق} \qquad \text{ك}}{\text{ق} \;\&\; \text{ك}}$$

(ح&) $$\dfrac{\text{ق}_{1} \;\&\; \text{ق}_{2}}{\text{ق}_{\text{ر}}}$$

(ت⊃) $$\dfrac{\begin{array}{c}[\text{ق}]\\ \vdots \\ \text{ك}\end{array}}{\text{ق} \supset \text{ك}}$$

(ح⊃) $$\dfrac{\text{ق} \supset \text{ك} \qquad \text{ق}}{\text{ك}}$$

(ت∨) $$\dfrac{\text{ق}_{\text{ر}}}{\text{ق}_{1} \vee \text{ق}_{2}}$$

(ح∨) $$\dfrac{\text{ق}\vee\text{ك} \qquad \begin{array}{c}[\text{ق}]\\ \vdots \\ \text{ل}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\text{ك}]\\ \vdots \\ \text{ل}\end{array}}{\text{ل}}$$

(ت~) $$\dfrac{\begin{array}{c}[\text{ق}]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\sim\text{ق}}$$

(ح~) $$\dfrac{\text{ق} \qquad \sim\text{ق}}{\bot}$$

(⊥) $$\dfrac{\bot}{\text{ل}}$$

(ت( )) $$\dfrac{\text{م أ}}{(\text{س})\ \text{م س}}$$

(ح( )) $$\dfrac{(\text{س})\ \text{م س}}{\text{م أ}}$$

(تE) $$\dfrac{\text{م أ}}{(\exists\text{س})\ \text{م س}}$$

(حE) $$\dfrac{(\exists\text{س})\ \text{م س} \qquad \begin{array}{c}[\text{م أ}]\\ \vdots \\ \text{ل}\end{array}}{\text{ل}}$$

٢–١ ملاحظات على قواعد جنتسن للاستنتاج وتعريفات

١. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسى{ ق، ك، ل، ...} إلى أية صيغة formula من صيغ النسق. وجدير بالذكر أن هذه الصيغ هى صيغ شارحة أو بعد منطقية metalogical بمعنى أنها تسمى صيغ النسق الفعلية: فالصيغة الشارحة ق مثلًا قد تسمى صيغ النسق التالية: ق، ق ⊂ ك، ق ∨ ك، ق & ك، ~ ق، ق & (ق⊂ ك). وهى الصيغ التي يمكن ترجمتها على التعاقب إلى ما يلى: الشمس طالعة، إذا كانت الشمس طالعة فالجو صاف، إما الشمس طالعة وإما الجو صاف، الشمس طالعة والجو صاف، لم يصح طلوع الشمس، الشمس طالعة وإن كانت كذلك فالجو صاف.

٢. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسى { م، ن، ...} إلى محمولات predicates. وكما قلنا فى البند السابق، فإن هذه الرموز هى صيغ شارحة لمحمولات النسق **م**، **ن**، ... إلخ. ومثالها فى اللغة العربية: إنسان، حيوان، ... إلخ.

٣. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسى {أ،ب، ...} إلى أسماء أو ثوابت فردية individual constants. مرة أخرى، تشير هذه الرموز الشارحة إلى أسماء النسق وثوابته الفردية: **أ**، **ب**... إلخ. ومثالها فى اللغة العربية: أحمد، مبنى مجلس النواب، ... إلخ.

٤. ترمز حروف الهجاء بالخط الأندلسى {س، ص، ...} إلى متغيرات فردية individual variables. تشير هذه الرموز الشارحة فى دورها إلى متغيرات النسق نفسه: س، ص، ... إلخ. ومثالها فى اللغة العربية: الأسماء المضمرة من قبيل المنفصلة أى هو، هى، ... إلخ.

٥. ترمز النقاط الثلاث العمودية فى البرهان الشجرى إلى وجود اشتقاق derivation من الصيغة/الصيغ التي فوقها إلى الصيغة التي تحتها. ونقصد بالاشتقاق، بصورة فضفاضة، وجود استنباط باستخدام قواعد الاستنتاج.

٦. ر=١ أو٢. ⊥ يعنى صيغة متناقضة. ( ) السور الكلى. (∃) السور الوجودى.

٧. يشير القوسان المعقوفان حول الصيغة إلى أن افتراضها قد فض discharged (von Plato, J. 2012, p. 327). وعليه، حين لا يُفض الافتراض يطلق عليه افتراض مفتوح open assumption، وحين يفض يقال عليه افتراض مغلق.

٧. تُقرأ الصيغ من اليمين إلى اليسار. مع ملاحظة قراءة الصيغ الحملية مثل م س أو م أ من اليسار إلى اليمين. فنقول س هو م، وأ هو م.

٨. تشير الرموز التي فوق الخط العرضى إلى الصيغ المستنتج أو المُشتَق منها، بينما تشير الصيغة التي تحت الخط إلى الصيغة المستنتجة أو المشتقة بناء على القاعدة التي تُكتب على يمين خط الاستنتاج بين قوسين. وهكذا، فإننا نستطيع تفسير وشرح قواعد الاستنتاج – على الطريقة الشجرية – فى النسق كما يلى:

٨.أ. تُستنتج الصيغة العطفية ق & ك (تحت الخط) من الصيغتين ق وك اللتين فوق الخط بقاعدة تقديم العطف (ت&) التى تُكتب على يمين الخط[١٠]. مثال ذلك:

الشمس طالعة الجو صاف

(ت&)----------------------

الشمس طالعة والجو صاف

٨.ب. تُستنتج الصيغة الانفصالية ق١ ∨ ق٢ (تحت الخط) من الصيغة قر التى فوق الخط بقاعدة تقديم الانفصال (ت ∨) التى تُكتب على يمين الخط:

الشمس ساطعة

(ت∨) ------------------------------------

إما الشمس ساطعة وإما الجو صاف

الشمس ساطعة

(حـ∨) ------------------------------------

إما الجو صاف وإما الشمس ساطعة

٨.ج. تُستنتج الصيغة قر (تحت الخط) من الصيغة ق١& ق٢ التى فوق الخط بقاعدة حذف العطف (ح&) التى تُكتب على يمين الخط:

الشمس طالعة والجو صاف

(ح&)--------------------

الشمس طالعة

الشمس طالعة والجو صاف

(ح&)-------------------

الجو صاف

٨.د. تُستنتج الصيغة ك (تحت الخط) من الصيغتين ق ⊂ ك، ق اللتين فوق الخط بقاعدة حذف الشرط أو إثبات المقدم (ح⊂) التى تكتب على يمين الخط:

إذا كانت الشمس طالعة فالجو صاف   الشمس طالعة

(ح⊂)---------------------------------------

الجو صاف

٨.هـ. تُستنتج الصيغة ق ⊂ك (تحت الخط) بواسطة (حـ⊂) من خلال افتراض الصيغة ق (فوق الخط) واشتقاق منها (وهو ما نعبر عنه بالنقاط العمودية الثلاث التى تحت بعضها البعض) الصيغة ك. وإذ يحدث ذلك فنحن نكون فى حل من الفرض ق وهو ما نعبر عنه بوضع الصيغة/الفرض ق بين القوسين المعقوفين []:

[الشمس ساطعة]

.

.

.

الجو صاف

(حـ⊂) ------------------------

إذا كانت الشمس ساطعة فالجو صاف

٨.و. تستنتج الصيغة ل (تحت الخط) بواسطة (ح∨) من خلال الصيغة ق∨ك (فوق الخط) عن طريق افتراض كلٍّ من الصيغة ق والصيغة ك واشتقاق من كليهما الصيغة ل. وإذ يحدث ذلك فنحن نكون فى حل من الفرضين/الصيغتين ق وك وهو ما نعبر عنه بوضع الصيغتين/الفرضين ق وك (كل فى موقعه) بين القوسين المعقوفين []:

[الشمس طالعة]　　　[الوقت ظهرًا]

.　　.

.　　.

.　　.

إما الشمس طالعة وإما الوقت ظهرًا　　الوقت نهار　　الوقت نهار

(ح∨)--

الوقت نهار

٨.ز. تستنتج الصيغة (س) م س (تحت الخط) بواسطة (حـ( )) التي تكتب على يمين الخط من خلال الصيغة م أ (فوق الخط) شريطة ألا يظهر أ فى النتيجة، أو يكون مفترضًا فى افتراض مفتوح لم يغلق. مثال ذلك:

كل هرم ثلاثى منتظم له أربعة أوجه

(ﺖ( )) ————————————————

هذا الهرم الثلاثى المنتظم له أربعة أوجه

٨.ح. تستنتج الصيغة ﻪ أ (تحت الخط) من الصيغة (س) ﻪ س (فوق الخط) بواسطة القاعدة (ﺠ ( ))، التى تكتب على يمين الخط، دون قيد أو شرط لأى أ. مثال ذلك:

كل إنسان له رأس واحدة

——————————(ﺠ ( ))

آدم له رأس واحد

٨.ط. تستنتج الصيغة (Ǝس) ﻪ س (تحت الخط) من الصيغة ﻪ أ (فوق الخط) بواسطة (ﺖƎ) التي تكتب على يمين الخط، دون قيد أو شرط:

آدم له رأس واحدة

(ﺖƎ) ————————

البعض له رأس واحدة

٨.ى. تستنتج الصيغة ل (تحت الخط) من الصيغة (Ǝس) ﻪ س (فوق الخط) بواسطة (ﺠƎ)، التي تكتب على يمين الخط، عن طريق افتراض الصيغة ﻪ أ واشتقاق الصيغة ل من الأخيرة على ألا يظهر أ في (Ǝس) ﻪ س أو ل. وإذ يحدث ذلك فنحن نكون فى حل من الفرض/الصيغة، وهو ما نعبر عنه بوضع الفرض/الصيغة ﻪ أ بين القوسين المعقوفين [].

[حسن أبيض]

.

.

.

بعض البشر بيض   بعض البشر لهم بشرة

(حـƎ)-----------------------------------

بعض البشر لهم بشرة

٨.ك. تستنتج الصيغة ل (تحت الخط) من أية صيغة متناقضة ⊥ (فوق الخط) بالقاعدة (⊥) التي تكتب على يمين الخط:

⊥

(⊥)-------------

غزا الأتراك الإسكيمو

٨.ل. تستنتج الصيغة ~ق (تحت الخط) من نقيضها الصيغة ق (فوق الخط) بواسطة قاعدة تقديم النفى (تـ~)، التي تكتب على يمين الخط، عن طريق افتراض الأخيرة ثم اشتقاق تناقض/صيغة متناقضة ⊥ منها. وإذ يحدث ذلك يُغلق الفرض/الصيغة ق بوضعه بين القوسين المعقوفين []:

[العدد الأصم نسبى]

.

أقل صورة نسبية للجذر التربيعى للعدد اثنين تتضمن عددين زوجين

أقل صورة نسبية للجذر التربيعى للعدد اثنين لا تتضمن عددين زوجين

⊥

(تـ~) ---

العدد الأصم ليس نسبيًا

٨.م. تستنتج الصيغة ⊥ (تحت الخط) بواسطة (حـ~) فى حال وجود صيغة ق ونفيها ~ق (فوق الخط)

الجو صاف وليس صافيًا

————————————— (ح~)

$\perp$

٩. في الاشتقاقات والبراهين التي تأخذ صورة شجرية، تعد كل صيغة عدا الصيغة النهائية endformula، مقدمة لقاعدة فتقف فوق الخط، وتعد كل صيغة فيما عدا الفروض نتيجة قاعدة فتقف تحت الخط. وهكذا ففي الاشتقاق الشجرى الصيغ التي ليس فوقها خط تعد بمثابة فروض. (Gentzen, G. 1934-1935/1969, pp. 72-73).

١٠. يطلق على الصيغة التي تشتمل على إجراء أو رابط connective منطقى، العلامة أو الصيغة الرئيسية Principal formula (Prawitz, D. 1965, p. 15) على حد تعبير داج برافيتس، وتعد هي المقدمة الكبرى major premise أثناء استخدام قاعدة الحذف التي تتطلب مقدمتين.

١١. تعد كلٌّ من (ت~) و (ح~) أو تقديم النفى وحذفه حالتين خاصتين على التعاقب من (ت⊃) و(ح⊃) أو تقديم الشرط وحذفه (Prawitz, D. 1965, p.21 ; von Plato, j. 2003, p.). فبالنسبة لتقديم النفى (ت~) فإنه يمكن التعبير عنه كحالة خاصة من تقديم الشرط (ت⊃) كما يلى:

[ق]

.

.

.

$\perp$

————— (ت⊃)

ق⊃$\perp$

فمن افتراضنا للصيغة ق التي ينتج عنها تناقض نستطيع بعد فض الصيغة ق التأكيد بأنه إذا كانت ق كان تناقض أو $\perp$. ومن هذا نجد أن النفى يمكن التعبير عنه بوصفه عبارة يلزم عنها تناقضًا، فيمكن تعريف النفى بذلك

وعدم اعتباره إجراءً أوليًّا أو تصورًا أوليًّا Primitive notion في النسق الذى نبنيه. ومن ثم يمكن الاستغناء عنه، وهذا ما سوف يتبين أكثر عندما نعرف التدرج في إنشاء أنسقة الاستنباط الطبيعى.

أما التعبير عن حذف النفى (حـ~) بوصفه حالة خاصة من حالات قاعدة حذف الشرط (حـ⊃) فيمكن التعبير عنه كما يلى: على اعتبار أن القضية المنفية ~ق هي تقديم شرط ق⊃⊥ كما تبين فيما سبق فإن حذف النفى (حـ~) يصبح حذفًا للشرط على النحو التالى:

ق⊃⊥   ق ----------- (حـ ⊃) ⊥

١٢. في قاعدتى الأسوار تعد أ في (تـ( )) و(حـ∃) بمثابة متغير حر، أما في (حـ ( )) و (تـ∃) فهى قد تكون متغيرًا حرًّا أو اسمًا (ثابتًا). وشروط المتغير في التقديم والحذف هي الشروط المعتادة للأنسقة التي تتبع نمط جنتسن في الاستنباط الطبيعى(١١).

١٣. تتدرج أنسقة الاستنباط الطبيعى من حيث الغنى وزيادة المحتوى كما يلى:

١٣.أ. **المنطق الموجب:** تفضى القواعد (تـ&)، و(حـ&)، و(تـ⊃)، و(حـ⊃)، و(تـ∨)، و(حـ∨)، و(تـ( ))، و(حـ ( ))، و(تـ∃)، و(حـ∃) إلى المنطق الحملى الموجب positive. ونحن إن حذفنا منه القواعد الخاصة بالمنطق الحملى حصلنا فقط على المنطق العبارى الموجب، وهناك أمثلة لهما في: (Hackstaff, L. H. 1966, pp. 130-169 & Seldin, P. J. N, 1989, p. 195). وأهم ما يتميز به هذا المنطق هو غياب صيغ النفى.

١٣.ب. **المنطق الأقل:** تفضى قواعد المنطق الموجب (سواء عبارى أو حملى) مضافًا إليها صيغة التناقض ⊥ أو النفى إلى ما يطلق عليه المنطق الأقل minimum or minimal (Prawitz, D. 1965, p. 21)، ونجد

أمثلة له في: (Hackstaff, L. H. 1966, p. 232 Seldin, P.J. 1989, p.195). ومن الصيغ المميزة لهذا المنطق: (ق ⊂ ~ق) ⊂~ق. وكذلك: ق ⊂ ~~ق.

١٣.ج. **المنطق الحدسى:** تفضى قواعد المنطق الأقل مضافًا إليها قاعدة حذف التناقض (⊥) إلى المنطق الحدسى (Parawitz, D. 1965, p. 21). ومن الصيغ المميزة لهذا المنطق: ~ق⊂ (ق ⊂ ك)

١٣.د. قبل الانتقال في تدرجنا إلى المنطق الكلاسيكى تجب الإشارة إلى أن المنطق الحدسى نموذجه نسق جنتسن الذى أجملنا قواعد استنتاجه عاليه، وهو مستوحى من منطق آرنت هايتنج A. Heyting للقضايا (Heyting, A. 1930b/1998). ومن أهم سمات هذا المنطق (Fitch, B. F. 1952, p. 58 ; Hackstaff, H. L. 1966, pp. 219- 223; Heyting, A. 1930a, pp. 306-308) من ١) **الناحية الدلالية:** هو تأويله لمعنى النفى؛ فالنفى بالنسبة للويتسن بروفر Luitzen Brouwer وآرنت هايتنج يعنى الاستحالة أو عدم القدرة على إنشاء برهان. فالقضية ~ق معناها استحالة إنشاء برهان للقضية ق. هذا الفهم الدلالى كان موجهًا للفهم التركيبى التالى: ٢) **الناحية التركيبية:** هو عدم القدرة على البرهنة على قانون الثالث المرفوع (فإذا لم يكن لدينا برهان على ق فلا يعنى ذلك استحالة وجود برهان أو ~ق، بعبارة أخرى إذا كانت ق كاذبة لا يعنى ذلك أن ~ق صادقة). وعدم القدرة على البرهنة كذلك على قانون نفى النفى (إذا كان من المستحيل وجود برهان على كذب ق أو إذا كان ~~ق، فلا يعنى ذلك أن ق صادقة أي لها برهان أي إننا لا نستطيع الانتقال من ~~ق إلى ق). ومن سماته التركيبية كذلك عد الروابط مستقلة وغير قابلة للتعريف ببعضها البعض.

١٣.هـ. **المنطق الكلاسيكى:** من أجل الحصول على المنطق الكلاسيكى من المنطق الحدسى لا بد من إضافة قاعدة أخرى، هذه القاعدة اختلف عليها مناطقة الاستنباط الطبيعى، لا بسبب مبدأ التسامح الكارنابى (Carnap, R.

1937, pp. xiv-xv) في إنشاء الأنسقة، ولكن لأنها غالبًا ما تتعارض مع معيارية البرهان وقد تفضى إلى التفافه كما سنرى. لقد كانت قاعدة البرهان غير المباشر هي المرشح الأول لهذا منذ جنتسن ومرورًا ببرافيتس وصولًا إلى سايدرز وفون بلاتو. لننظر الآن في معنى معيارية البرهان في الاستنباط الطبيعى، ونرى علاقته وإشكالياته بتلك القاعدة.

٣. جنتسن والتفاف البرهان في الاستنباط الطبيعى

قواعد الاستنتاج السابقة، بمعية قواعد التكوين، تشكل نسق جنتسن الحدسى في الاستنباط الطبيعى. ويلاحظ أن تلك القواعد تجمع بين إما أخذ التناقض وإما النفى كحد أولى. وعلى وجه العموم انتهى جنتسن إلى أخذ التناقض كحد أولى (von Plato, J. 2013, p. 48).

على أية حال، لقد تبين لجنتسن إمكانية وجود التفاف في براهين الاستنباط الطبيعى، وإذ قد حددنا في المقدمة الالتفاف بمعنى الخطوات غير الضرورية أو الزائدة أو الفائضة عن الحاجة، فعلينا الآن أن نحدد معناه الدقيق. لنأخذ المثال التالى: لينزل أننا نشتق من أحد الفروض القضية ق، ونشتق من فرض آخر القضية ك، ثم نستخدم بعد ذلك قاعدة تقديم العطف (ت&) لنشتق (ق & ك)، وبعد هذا نستخدم قاعدة حذف العطف (ح&) لنشتق القضية ق أو القضية ك. صورة هذا الاشتقاق ستكون كما يلى:

```
 .        .
 .        .
 .        .
 ق        ك
-------- (ت&)
 (ق & ك)
-------- (ح&)
    ق
```

لقد قمنا في هذا الاشتقاق بدس (ق & ك) في البرهان دون داعٍ، فنحن إذ اشتققنا ق كان بإمكاننا الاستمرار في البرهان دون اشتقاق (ق & ك) أو اللف roundabout حولها ومن ثم التفاف detour البرهان. ونحن إذ نستخدم قواعد للتقديم والحذف في البراهين، ومن ملاحظة إننا قد استخدمنا التقديم ثم الحذف في المثال السابق، فإنه يمكن تعريف الالتفاف كما يلى:

تعريف التفاف البرهان: يكون البرهان ملتفًا حين تسبق قاعدةَ الحذف التي تطبق على مقدمة كبرى قاعدةُ تقديم من نوعها نفسه.

هذا هو الالتفاف، وهو يحدث فى بقية إجراءات الاستنباط الطبيعى من شرط وانفصال ونفى إن كان الأخير إجراءً أوليًا. وظاهرٌ أنه يزيد تعقيد البراهين. وعليه، فقد حدد جنتسن ضرورة أن يكون البرهان على شاكلة ما أطلق عليه الصيغ المعيارية normal forms، أي الصيغ التي ليس فيها التفاف (أى الصيغ التى تبدأ بقاعدة تقديم ثم بقاعدة حذف من النوع نفسه)، وبرهن على تحققها في نسقه الحدسى فيما يعرف بمعيارية Hauptsatz أو normalization البرهان، ومن ثم يمكن تعريف البرهان المعيارى في نسق جنتسن الحدسى للاستنباط الطبيعى – طبقًا لصياغة بيلليتير وهاتسن له – كما يلى (Pelletier, F.J. & Hazen, A. P. 2012, p. 370):

تعريف البرهان المعيارى: هو البرهان الذى لا توجد فيه صيغة تكون مستنتجة بواسطة قاعدة تقديم من ناحية، ومقدمة (كبرى) لاستنتاج آخر بقاعدة حذف من ناحية أخرى.

معنى هذا أن البراهين المعيارية في الاستنباط الطبيعى لدى جنتسن تبدأ بتفكيك الفروض المركبة إلى صيغ ووحدات أبسط من خلال قواعد الحذف، ثم تعود فتركب من جديد تلك الصيغ التي فُكَّكت في صورة جديدة بواسطة قواعد التقديم. ينتج عن هذا أن صيغ براهين الاستنباط الطبيعى لها خاصة الصيغة الفرعية subformual property التي يمكن تعريفها – طبقًا لبيللتير وهاتسين– كما يلى (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 370):

تعريف خاصة الصيغة الفرعية: كل صيغة تحدث في البرهان المعيارى هي صيغة فرعية للنتيجة أو لأحد الفروض.

ويوجز جنتسين كل ذلك بالقول: "إن المعيارية Hauptsatz تقول إن كل برهان منطقى محض يمكن رده إلى صيغة معيارية محددة وإن لم تكن فريدة. وقد نعبر عن الخواص الجوهرية للصيغة المعيارية بالقول: إنها ليست ملتفة. فلا يوجد تصورات تدخل في البرهان غير تلك التصورات الموجودة قبل في نتيجته النهائية، وكان استخدامها من ثم أساسيًّا للوصول إلى تلك النتيجة" (Gentzen, G. 1934/1969 p. 69).

قلنا إن جنتسن قد قدم برهانًا على معيارية الاستنباط الطبيعى الحدسى نشر بعد وفاته (Gentzen, G. 1933/2008, pp. 245-257). وهو قد استخدم لأجل ذلك – فيما يخص النفى – قاعدة حذف النفى فقط أو قاعدة (⊥) مستخدمًا ثابت التناقض كحد أولى، ومن ثم مستغنيًا عن قاعدة تقديم النفى (قدم جنتسن هذه القواعد في الفصل الأول من أطروحته غير المنشورة ١٩٣٣، وقد أوجزها فون بلاتو في: von Plato, J. 2008, p. 242).وهنا تجب التفرقة بين البرهان على الصيغة المعيارية من ناحية، والبرهان على معيارية الحساب المنطقى من ناحية أخرى: "تؤكد مبرهنة الصورة المعيارية بأنه يوجد لكل برهان في النسق برهان معيارى نظير، له نفس النتيجة ونفس المقدمات (أو فئة جزئية منها). هذا بينما مبرهنة المعيارية الأقوى تؤكد بأنه يوجد إجراء procedure (معقول) متى طُبق على برهان معلوم يحوله إلى برهان معيارى نظير" (Pelletier, F. J. & Hazen, A. P. 2012, p. 370). لم يقدم جنتسن برهانًا على الصيغة المعيارية فحسب بل هو قدم كذلك برهانًا على وجود إجراء لجعل البرهان معياريًّا. وهذا الإجراء يتلخص في اكتشاف الالتفاف ثم حذفه (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 371). أو بعبارة فون بلاتو: "يتأسس برهان جنتسن في معيارية البرهان على مقياس لتعقيد الاشتقاقات. وكل تحويل [للبرهان] يقلل من ذلك التعقيد حتى نصل إلى اشتقاق معيارى" (Von

(Plato, J. 2013, p.37)[١٢].

وعليه، ففى مثالنا السابق بعد أن اكتشفنا الالتفاف، فإنه علينا طبقًا لمبرهنة المعيارية، أو الإجراء المعيارى أن نقوم بحذفه، ومن ثم بتقليص طول البرهان كما يلى:

.	.
.	.
.	.
ق	ك
.	.
.	.
.	.

ماذا الآن عن الاستنباط الطبيعى للمنطق الكلاسيكى؟ هل يمكن صياغة مبرهنة المعيارية أو حتى الصورة المعيارية بالنسبة له؟ بداية، حتى يُحْصَل على الاستنباط الطبيعى للمنطق الكلاسيكى من قواعد الاستنتاج التي عرضناها في القسم الثانى من هذا البحث، يضيف إليها جنتسن قاعدة جديدة ألا وهى قاعدة نفى النفى أو ن ن (إضافة إلى قاعدة تقديم النفى) وهو يصوغها كما يلى (Gentzen, G. 1934/1965, p. 81):

$$\frac{\sim\sim ق}{ق}\ (ن\ ن)$$

وهى تعد بمثابة قاعدة حذف للنفى جديدة على حد تعبير جنتسن (Gentzen, G. 1934/1965, p. 81) بخلاف قاعدة حذف النفى المذكورة في القسم الثانى. وهى تماثل إضافة بديهية الوسط المرفوع إلى بديهيات النسق الحدسى. ولكن في هذه الحالة، سوف يكون الالتفاف في البرهان كامنًا built in

في القاعدة نفسها بمعايير المنطق الحدسى. ولتوضيح ذلك نقول إننا اتفقنا على أن قاعدتى تقديم النفى وحذفه هما حالتان خاصتان من تقديم الشرط ونفيه، ليكن الأمر كذلك، هذا من ناحية. ولكننا من ناحية أخرى سنكتشف أن قاعدة نفى النفى في دورها هي حالة خاصة من استخدام متعاقب لقاعدتى تقديم الشرط أو النفى ثم حذفه (ثم استخدام قاعدة ⊥). وهكذا فعلى اعتبار استخدام قاعدتى تقديم النفى وحذفه سنجد أن قاعدة نفى النفى تخضع للصورة التالية طبقًا لمعايير الاستنباط الطبيعى الحدسى:

|ق
.
.
.
⊥
---- (ت~)
~ ق
.
.
.
⊥
------- (ت~)
~ ~ ق   ~ق
------------ (ح~)
⊥
------- (⊥)
ق

معنى هذا؛ أننا إذا افترضنا القضية ق واشتققنا منها تناقضًا، فبتطبيق قاعدة تقديم النفى نتحصل على نفيها أي ~ ق، ومن هذه القضية الجديدة إذا اشتققنا تناقضًا آخر فنحن نصل إلى نفى النفى ~~ق بتطبيق جديد لتقديم النفى، وبمعية افتراض ~ق مرة أخرى نستنتج منها ومن ~~ ق تناقضًا من خلال تطبيق حذف النفى. وأخيرًا نصل إلى ق بتطبيق قاعدة التناقض. يتضح من هذا أن قاعدة نفى النفى ما هي إلا التفاف مقنع نستخدم فيه قاعدة التقديم

ثم قاعدة الحذف للرابط نفسه، وفى حالتنا هنا إجراء النفى حيث استخدمنا تقديم النفى مرتين ثم استخدمنا من بعدهما حذف النفى مباشرة.

أما في حالة تأويل قاعدة نفى النفى على أنها حالة خاصة لقاعدتى إجراء الشرط فإن الموقف سيكون بالمثل كما يلى:

[ق]
.
.
⊥
----- (تـ⊂)
ق ⊂ ⊥
.
.
⊥
-------------- (تـ⊂)
ق ⊂ ⊥   (ق ⊂ ⊥) ⊂ ⊥
------------------- (حـ⊂)
⊥
------- (⊥)
ق

معنى هذا مرة أخرى؛ أننا إذا افترضنا القضية ق واشتققنا منها تناقضًا، فبتطبيق قاعدة تقديم الشرط نتحصل على (ق ⊂ ⊥)، ومن هذه القضية الجديدة إذا اشتققنا تناقضًا آخر فنحن نصل إلى نفى النفى ((ق ⊂ ⊥) ⊂ ⊥) بتطبيق جديد لتقديم الشرط، وبافتراض (ق ⊂ ⊥) بمعية (ق ⊂ ⊥) ⊂⊥) نصل إلى تناقض، وذلك من خلال تطبيق حذف الشرط. وأخيرًا نصل إلى ق بتطبيق قاعدة التناقض. يتضح من هذا، مرة أخرى، أن قاعدة نفى النفى ما هى إلا التفاف مقنع نستخدم فيه قاعدة التقديم ثم قاعدة الحذف للرابط نفسه، وفى حالتنا هنا إجراء الشرط.

لقد كان جنتسن على دراية بأن قاعدة نفى النفى تشكل عائقًا في إثبات

معيارية براهين المنطق الكلاسيكى (Gentzen, G. 1934/1965, p.81)، لذا فهو قد تخلى عن تلك المهمة واكتفى بأن أثبت معيارية براهين الاستنباط الطبيعى الحدسى من جهة، وأن ابتكر حساب المتتابعات sequents ليثبت من خلاله معيارية براهين المنطق الكلاسيكى في الاستنباط الطبيعى من جهة أخرى (von Plato, J. 2012, p. 330). لكن هذا لم يثن مناطقة الاستنباط الطبيعى عن البحث عن قاعدة تفضى إلى معيارية المنطق الكلاسيكى، ولقد كانت قاعدة البرهان غير المباشر خير مرشح لذلك.

٤. برافيتس والبرهان غير المباشر لأنسقة الاستنباط الطبيعى الكلاسيكية:

لعل القصور الذى أوضحناه في قاعدة نفى النفى هو الذى جعل من برافيتس يستخدم قاعدة البرهان غير المباشر indirect proof. فبدلًا من قاعدة نفى النفى يضع برافيتس في نسقه للاستنباط الطبيعى الكلاسيكى قاعدة البرهان غير المباشر التالية (التي نختصرها بـ غ م):

[~ق]
.
.
⊥
---- (بـ غ م)
ق

يبدو أن برافيتس بذلك ينطلق بسهولة من المنطق الحدسى إلى المنطق الكلاسيكى. فكل شيء يبدو على ما يرام؛ فقاعدة البرهان غير المباشر هي صيغة مقنعة لقانونى الثالث المرفوع ونفى النفى اللذين يحتاجهما المنطق الحدسى ليصير كلاسيكيًّا، فهى تخفى وراءها قانون نفى النفى، وقانون نفى النفى يتخفى في دوره وراءها.

فهى تتخفى وراء قانون نفى النفى "إذ يمكن اشتقاق نتيجتها من قانون

نفى النفى" (von Plato, 2013, p. 81). وذلك كما يبين الاشتقاق التالى (ibid.).

```
[~ق]
 .
 .
 .
 ⊥
-------- (ت⊂)
~ق⊂⊥
-------- (ت~)
~~ ق
-------- (ن ن)
ق
```

وهى تخفى وراءها قانون نفى النفى إذ يمكن اشتقاق قانون نفى النفى منها كما يلى (ibid.):

```
~~ ق      ~ ق
------------ (ح⊂)
      ⊥
---------- (بـ غ م)
      ق
---------- (ت⊂)
  ~~ق⊂ق
```

فمن فرض ~~ق ثم فرض ~ق نصل إلى ⊥ بحذف الشرط، ثم نصل إلى ق بالبرهان غير المباشر وبذلك نكون قد أغلقنا الفرض ~ق ثم نصل إلى نفى النفى أو ~~ق ⊂ ق بإغلاق الفرض ~~ق عن طريق تقديم الشرط.

الوصول من ثم إلى مبرهنات المنطق الكلاسيكى سهل يسير. ولكن يبدو أن الأمور لا تسير بهذه البساطة خاصة إن وضعنا في اعتبارنا **أهمية الاحتفاظ بمعيارية براهين المنطق الكلاسيكى بالنسبة لكافة الروابط.**

بداية، تبين هذه القاعدة أهمية أن تكون النتيجة موجبة، وذلك من خلال كون الافتراض يسبقه إجراء النفى؛ وعليه فهى تبين كذلك أهمية أن تكون النتيجة ليست سالبة؛ إذ إن كانت سالبة فمعنى ذلك أنه يمكن اشتقاق النتيجة طبقًا لقواعد المنطق الحدسى فقط، وذلك كما يلى:

~~ق
.
.
⊥
------ (تـ~)
~~~ق

ولكن طبقًا للمنطق الحدسى فإن ~ق تلزم من ~~~ق (~~~ق⊂~ق) (von Plato, J. 2012, p.). بل وهى ستصبح حالة خاصة لتقديم الشرط أو تعريف النفى كما تبين في القسم الثانى من هذا البحث. والحقيقة إننا حتى لسنا في احتياج لكل هذا البيان؛ فلقد برهن عالم المنطق جلافينكو على أنه "إذا كان كذب تعبير معين في منطق القضايا قابل للبرهنة في المنطق الكلاسيكى فإن هذا الكذب نفسه قابل للبرهنة في منطق بروفر [الحدسى]" (Glavenco, V. 1929/1998, p. 301). وهو ما يفضى في الحال إلى ضرورة أن تكون نتيجة البرهان غير المباشر موجبة حتى تكون نتيجة في المنطق الكلاسيكى دون المنطق الحدسى. وعليه؛ فإن قاعدة البرهان غير المباشر لن يكون لها أية فائدة – في المنطق الكلاسيكى – إن استخدمناها من أجل اشتقاق نتائج سالبة. بناء على ما سبق؛ تأتى أهمية ضرورة تقييد قاعدة البرهان غير المباشر من ناحية إيجاب النتيجة. ومع هذا فقد ترخص بارافيتس في هذا التقييد، ولم ير أنه ضرورى (Prawitz, D. 1965, pp. 20-21)؛ فيبدو إنه لم ير خطورة كبيرة في عدم التقييد ذاك. إلا أن التقييد ضرورى كما أوضحنا وإلا ظللنا في المنطق الحدسى ولم نتجاوزه إلى المنطق الكلاسيكى.
~~~

على أية حال؛ يمكن توجيه سهام النقد السالفة، بل وغيرها، إلى قاعدة البرهان غير المباشر. وأهم ثلاثة انتقادات تقع تحت جنس واحد لتلك القاعدة هى ما يلى:

١. القاعدة تخفى التفافًا.

٢. القاعدة تفضى إلى تعقيد مفهومى.

٣. القاعدة تفضى إلى إلغاء خاصة الصيغة الفرعية.

٤-١. بخصوص الالتفاف الذى تخفيه قاعدة البرهان غير المباشر، يكفى أن ننظر للكيفية التي عرضنا بها طريقة تخفى البرهان غير المباشر وراء نفى النفى فيما سبق. ففي المخطط الذى يعرض لذلك التخفى نجد أننا قد بدأنا بقاعدة تقديم الشرط ثم قاعدة تقديم النفى ثم قاعدة نفى النفى، ولكن تقديم النفى هو تقديم للشرط كما بينا في القسم الأول بند ١١، بينما نفى النفى هو حذف النفى كما بينا عاليه، وهكذا فقاعدة البرهان غير المباشر تتضمن تقديمًا للنفى يعقبه مباشرة حذفٌ للنفى وهو التفاف. ويعبر بيللتير وهاتسن خير تعبير عن هذا النقد بالقول: "إن تلك القاعدة يمكن أن تنكسر إلى خطوتين: فبناء على اشتقاق تناقض من ~ق، فإن الخطوة الأولى تؤكد ~~ق عن طريق الصورة الحدسية الصحيحة للرد إلى المحال (أي عن طريق قاعدة تقديم النفى المعيارية لأنسقة الاستنباط الطبيعى للمنطق الحدسى)، أما الخطوة الثانية فتقوم على استنتاج ق ... عن طريق **قاعدة حذف النفى المزدوج.** فكر في الأمر على هذا النحو، فثمة مشكلة مباشرة: نمط الاستنتاج الخاص الذى يسمح للبراهين الكلاسيكية التي ليست صحيحة حدسيًّا يبدو وأنه "التفاف" على نحو جوهرى، أعنى أن ثمة قاعدة تقديم تستخدم من أجل استنتاج نفى مزدوج يستخدم بعد ذلك كمقدمة لقاعدة حذف، مما يفضى إلى أنه لن يوجد برهان كلاسيكي باطل حدسيًّا يمكن له أن يكون معياريًّا وذلك بناء على هذا التأويل العفوى "للمعيارى" (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 372).

إن ردة فعل برافيتس على هذا النقد هو اعتباره أن البرهان غير المباشر غير قابل للتحليل، أو بمعنى آخر أخذه على نحو أولى (Ibid.)!

٤-٢. أما بخصوص التعقيد المفهومى؛ فيعرفه بيلليتير وهاتسن على أنه: "الاستمرار في بناء البرهان (بدون التفافات واضحة ربما) من مقدمات بسيطة نصل بها إلى برهان ... لصيغة مركبة وطويلة للغاية، ثم اشتقاق، بعد ذلك (مرة أخرى عن طريق وسائل تنظر فيما هو معيارى) نتيجة بسيطة من الصيغة المركبة الأخيرة" (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 372). ويمكن إيضاح ما يريد قوله بيلليتير وهاتسن بلغتنا الرمزية التي تبنيناها في هذا البحث كما يلى من خلال المخطط البرهانى التالى:

~(ق ⊃ ك)
.
.
⊥
-------- (بـ غ م)
(ق ⊃ ك)   ق
-------------- (ح⊃)
ك

وهكذا فنحن قد توصلنا بواسطة البرهان غير المباشر – من خلال افتراضنا للصيغة ~(ق ⊃ ك) – إلى نتيجة مركبة ألا وهى (ق ⊃ ك)، ثم توصلنا، بواسطة الأخيرة وبمعية الافتراض ق – وهو مزيد من التركيب – إلى نتيجة أبسط (حيث حذفنا إجراء الشرط) ألا وهى ك. معنى هذا أن الاستنباط السابق ينافى فكرة البرهان المعيارى في الاستنباط الطبيعى نفسه التي أشرنا إليها سابقًا، ألا وهى الاستنباط من خلال التبسيط أو تحليل المقدمات إلى عناصرها ثم تركيب تلك العناصر مرة أخرى معًا في النتيجة. وهو ما عبر عنه

برافيتس نفسه بالقول: "ينتقل الاستنباط في صورته المعيارية من افتراضات الاستنباط إلى النتيجة على نحو مباشر وخال من الالتفافات. ويمكن القول بصورة تقريبية إن الافتراضات تُكسر في البداية إلى أجزائها عن طريق التطبيق المتتابع لقواعد الحذف، ثم تُجمع أجزاؤها تلك بعد ذلك كى تشكل النتيجة عن طريق التطبيق المتتابع لقواعد التقديم" (Prawitz, D. 1965, p. 8). وهذا ليس إلا خاصة الصيغة الفرعية للبرهان المعيارى. فبناء على ذلك التصور للبرهان (المعيارى) في الاستنباط الطبيعى، فإنه يلزم أن كل صيغة في البرهان هي صيغة فرعية لفرض ما أو للنتيجة، فهى صيغة فرعية للفرض لأننا نقوم بتكسير الفروض، وهى صيغة فرعية للنتيجة؛ لأن الأخيرة ما هي إلا تجميع لصيغ البرهان. وبناء عليه:

٣-٤. فإن قاعدة البرهان غير المباشر لن تفضى إلى تعقيد مفهومى فحسب بل هي ستفضى أيضًا إلى غياب خاصة الصيغة الفرعية عن البرهان ومن ثم افتقاده لخاصة المعيارية (von Plato, J. 2013, p.85).

كيف يحل برافيتس هذه المعضلات؟ هو بداية -كما أشرنا قبل- لا يعترف بأن قاعدة البرهان غير المباشر تعد بمثابة قاعدة تقديم يتبعها بالضرورة قاعدة حذف؛ إنه يعتبرها قاعدة أولية غير قابلة للتحليل. وبهذا فهو يتفادى النقد الأول الذى يقرر أن التفاف البرهان قار في قاعدة البرهان غير المباشر. أما بخصوص النقدين الثانى والثالث فإن برافيتس يشترط أن تكون نتيجة قاعدة البرهان غير المباشر صيغة ذرية[١٣]. **وبهذا لن توجد إمكانية استنتاج صيغة ذات رابط رئيس ثم حذفه بعد ذلك بواسطة قاعدة حذف.** إن برافيتس قد تجنب على هذا النحو النقدين الثانى والثالث بضربة لازب. بل وهو قد وضع بعد ذلك مبرهنته على الصيغة المعيارية في المنطق الكلاسيكى ذي قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. ولكن هذا في مقابل التضحية باكتمال منطق الدرجة الأولى ذي قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. فمن خلال تعريف برافيتس للبرهان المعيارى على النحو الذى يقيد قاعدة البرهان غير المباشر "فإن مبرهنة الصيغة

المعيارية لن تنطبق إلا إذا كان النسق ذو القاعدة الكلاسيكية المقيدة للحالات الذرية مكتملًا complete بالنسبة إلى المنطق الكلاسيكى؛ بمعنى أنه من الممكن البرهنة باستخدام القاعدة الكلاسيكية في صورتها المقيدة على كل شيء استطعنا البرهنة عليه بواسطتها ولكن دون تقييد" (Pelletier, F. J. & Hazen, A.P. 2012, p. 372). إن ما يقصده بللتيير وهاتسن هو أنه إذا كان لدينا صيغة تحصيل حاصل tautology أو صحيحة valid في المنطق الكلاسيكى الذى لا يستخدم قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة فلا بد لهذه الصيغة نفسها أن تكون مشتقة أو مبرهنة في النسق الكلاسيكى الذى يستخدم قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة، وهذا معنى الاكتمال الذى يقصده. نسق برافيتس الكلاسيكى مكتمل بالطبع ولكنه ليس كذلك إن ظللنا نستخدم قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. ويقدم بيللتير وهاتسن صاحبا هذا النقد الحالة التالية (Ibid.): (س) ((Ǝص) ~ م ص V مس) ⊂ ((Ǝص) ~ مص V (س) مس). هذه الصيغة لئن كانت صحيحة في المنطق الكلاسيكى إلا أنه لا يمكن استنتاجها بواسطة قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة، وهو ما ينفى اكتمال نسق برافيتس أو أي نسق يعتمد على قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة. ليس هذا فحسب، بل إن برافيتس إذ برهن معيارية براهين النسق ذي قاعدة البرهان غير المباشر المقيدة إلا أنه لم يبرهن ذلك بخصوص الانفصال والسور الوجودى (Yuuki, A. 1994, p. 153)، أو ما يطلق عليه المنطق الكلاسيكى الممتلئ full، واكتفى من أجل ذلك بحقيقة أنه –في المنطق الكلاسيكى– يمكن تعريف الانفصال من خلال الروابط الأخرى بينما يمكن تعريف السور الوجودى بواسطة السور الكلى والنفى (Plletier, F. J. & Hazen, A. P. 2012, p.). إن أضفنا إلى كل ذلك ما قلناه عن ترخص برافيتس في ضرورة أن تكون نتيجة قاعدة البرهان غير المباشر موجبة أصبح موقف برافيتس صعب القبول.

٥. ما بعد برافيتس وإمكانية الاستغناء عن البرهان غير المباشر

هناك فى إطار التقليد البرافيتسى، محاولة من قبل أنيكا سايدرز وجان

فون بلاتو للاحتفاظ بقاعدة البرهان غير المباشر من الانتقادات التي وجهت إليها (von Plato, J. & Siders, A. 2012). وينص فون بلاتو – تلميذ برافيتس – قبل كل شىء صراحة على ضرورة أن تكون نتيجة البرهان غير المباشر موجبة (von Plato, J. 2013, p. 82) متفاديًا بضربة لازب الانتقاد بالترخص الذى وجهناه إلى برافيتس في القسم السابق.

على أية حال؛ تستند محاولة سايدرز وفون بلاتو أساسًا على فكرة غياب خاصة الصيغة الفرعية نتيجة تطبيق البرهان غير المباشر دون تقييد (von Plato, J. 2013, p.85) فهو قد يؤدى إلى استخدام قاعدة تقديم ثم قاعدة حذف، هذا من جهة، وهى من جهة أخرى تفرض تقييدًا آخر على تلك القاعدة ولكن هذا التقييد لا يقوم على وجوب أن تكون نتيجة القاعدة صيغة ذرية. إن هذه المحاولة تقوم بعمل تحويل تباديلى permutative للبرهان الذى يحتوى على غياب لخاصة الصيغة الفرعية. فهى، على وجه الإجمال، تشترط من أجل منع غياب خاصة الصيغة الفرعية أن تكون قاعدة البرهان غير المباشر هي آخر قاعدة تستخدم في البرهان (von Plato, J. 2012, p.87). وبلغة سايدرز وفون بلاتو"**إن الاشتقاقات الممتدة في الاستنباط الطبيعى القياسى بواسطة قاعدة البرهان غير المباشر تتحول إلى صورة ليس فيها مقدمة كبرى لقاعدة حذف مستنتجة بواسطة البرهان غير المباشر**" (von Plato, J. & Siders, A. 2012, p. 209). وهذا الاشتراط ينطبق على جميع قواعد الحذف والتقديم (ibid.) (١٤) كما تثبته مبرهنة المعيارية لفون بلاتو وسايدرز. وحتى تتضح الأمور بصورة أكبر نعطى التوضيح الآتى: إن كان لدينا البرهان التالى (ibid.) بواسطة قاعدة البرهان غير المباشر:

```
~(ق & ك)
.
.
.
⊥
--------- (بـ غـ م)
(ق & ك)
--------- (ح&)
ق
```

وهو البرهان الذى يقوم على قاعدة تقديم (بـ غـ م) ثم قاعدة حذف (ح&) وهو ما يخالف فكرة معيارية البراهين وخاصة الصيغة الفرعية معًا كما أشرنا، هذا البرهان يمكن لنا أن نحوله إلى برهان معيارى يحتفظ بخاصة الصيغة الفرعية عن طريق عمل التحويل التباديلى للصيغ وللبرهان غير المباشر في البرهان وذلك كما يلى (Ibid.):

```
(ق & ك)
------- (ح&)
~ق          ق
------------ (ح⊂)
⊥
-----------(ث⊂)
~(ق&ك)
.
.
⊥
------- (بـ غـ م)
ق
.
```

وتفسير هذا البرهان كما يلى: نحن قد افترضنا بداية ~ ق ثم افترضنا بعد ذلك (ق & ك) ثم طبقنا قاعدة حذف العطف فحصلنا على ق، وبمعية ~ق

وبتطبيق حذف الشرط توصلنا إلى تناقض، وعليه فقد توصلنا من الفرض (ق & ك) إلى تناقض وبإغلاقه بتطبيق تقديم الشرط توصلنا إلى ~(ق & ك) التي أفضت إلى تناقض، هذا التناقض هو نتيجة فرضنا الأول ~ ق الذى نغلقه الآن بقاعدة البرهان غير المباشر فنحصل على النتيجة المطلوبة ق، وهى هي نفسها نتيجة البرهان السابق المعيب معياريًّا.

إن الفكرة الرئيسة التي تقف خلف التحويل التباديلى لعمل سايدرز وفون بلاتو هي: **أن نفترض في البرهان المعيارى نقيض النتيجة النهائية في البرهان غير المعيارى (وهو في حالتنا الفرض الأول ~ق)، وبذلك نضمن أن نطبق عليه البرهان غير المباشر كآخر قاعدة نطبقها. ثم نفترض بعد ذلك في برهاننا المعيارى النتيجة التي توصلنا إليها بواسطة البرهان غير المباشر في البرهان غير المعيارى (وهو في حالتنا الفرض الثانى ق & ك) ثم نقوم بإغلاق الفرض الثانى على نحو معيارى، ثم بعد ذلك نغلق الفرض الأول بقاعدة البرهان غير المباشر.**

ليس هذا فحسب بل إن فون بلاتو وسايدرز قدما برهانًا على معيارية كافة روابط المنطق الكلاسيكى، بما فيها الانفصال والسور الوجودى وذلك بعد عمل تعديل لقواعد الحذف (von Plato, J. & Siders, A. 2012, pp. 205-209).

والسؤال الآن: هل حقًّا خرجت قاعدة البرهان غير المباشر من مستنقع الانتقادات التي حامت حولها؟ يبدو أنه قد يُحْتَفَظ بقاعدة البرهان غير المباشر إن تبنينا مقاربة سايدرز وفون بلاتو. ولكن بعيدًا عن التقييدات الملحة على القاعدة من جهة برافيتس أو التباديل التي يعملها عليها سايدرز وفون بلاتو من أجل الحفاظ على القاعدة، فإنه يبدو أن ثمة إفراطًا فى هذه القاعدة، أو على حد تعبير سلدين "هي أقوى مما هو ضرورى، وسوف تعطينا المنطق الكلاسيكى عندما تضاف إلى المنطق الأقل"(Seldin, P. J. 1989, p. 193).

لم يوضح سيلدين كيف نحصل على المنطق الكلاسيكى من المنطق

الأقل بإضافة قاعدة البرهان غير المباشر. ولعل ما يعنيه نجده في منطوق كيورى H. Curry لمبرهنته الثالثة للصياغات T للنفى[١٥]. على أية حال؛ يبدو أن مقصد سيلدين هو ما يلى:

المنطق الأقل نحصل عليه – كما أشرنا في القسم الأول – من خلال إضافة النفى أو رمز التناقض ⊥ إلى المنطق الموجب، فإن أضفنا قاعدة البرهان غير المباشر إلى هذا المنطق، وطبقًا لما بيناه من قبل في القسم السابق فإننا نستطيع أن نبرهن على نفى النفى بواسطة البرهان غير المباشر، ونفى النفى مكافئ لقانون الثالث المرفوع، فلا يتبقى إلا قاعدة ⊥ الحدسية للحصول على المنطق الكلاسيكى. ولكن قاعدة ⊥ "هي حالة خاصة، من البرهان غير المباشر" (Prawitz, D. 1965, p. 21)، في دورها. فماذا نريد أكثر من هذا كى نحصل على مبرهنات المنطق الكلاسيكى!! ألم يقل جنتسن إننا في حاجة فقط إلى قاعدة نفى النفى أو مبرهنة الثالث المرفوع للحصول على مبرهنات المنطق الكلاسيكى من المنطق الحدسى، ولكن إذا كان لدينا هاتان المبرهنتان أو القاعدتان وكانت القاعدة التي ينماز بها المنطق الحدسى حالة خاصة من قاعدة البرهان غير المباشر التي لدينا؛ فإننا نستطيع من ثم استخراج المنطق الكلاسيكى من المنطق الأقل. وعليه؛ فإن سيلدين محق في أن قاعدة البرهان غير المباشر تقدم أكثر مما هو ضرورى للخروج بالمنطق الكلاسيكى من المنطق الحدسى.

إن ما يقصده سيلدين كذلك هو أننا نريد المنطق الكلاسيكى من المنطق الحدسى وليس من المنطق الأقل. قاعدة البرهان غير المباشر تستطيع أن تعطينا مبرهنات المنطق الكلاسيكى بمجرد إضافتها إلى المنطق الأقل، لذا فهى أقوى جدًّا مما هو ضرورى بينما نحن في حاجة إلى قاعدة إن أضفناها إلى المنطق الأقل لا تعطينا مبرهنات المنطق الكلاسيكى بل هي تعطينا الأخير إن أضفناها إلى المنطق الحدسى. وهى كذلك ستحتفظ بخاصة الصيغة الفرعية ومعيارية البراهين حتى للانفصال والسور الوجودى دون إجراء تعديل

على قواعد الحذف كما فعل سايدرز وفون بلاتو. إن وجدت هذه القاعدة فهى بالتأكيد ستجب قاعدة البرهان غير المباشر؛ وهى موجودة. لقد قدم كيورى هذه القاعدة، التى أطلق عليها (ن د)، كما يلى:

[~ق]
.
.
.
ق
---- (ن د)
ق

إن قاعدة (ن د) لن تعطينا المنطق الكلاسيكى بإضافتها إلى المنطق الأقل، بل هي ستعطينا المنطق الكلاسيكى إن أضفناها إلى المنطق الحدسى. ولقد برهن كيورى على هذا فيما أطلق عليه المبرهنة الثالثة للصياغات T للنفى. لن نعرض لهذه المبرهنة بالتفصيل حيث إنها طويلة وتستخدم قواعد لم نطرحها في هذا البحث من ناحية، وهى ليست موضع دراستنا في هذا البحث من ناحية أخرى. ولكن منطوق المبرهنة (مع بعض التعديل الذى يتناسب مع مصطلحات هذا البحث) يكشف عن الكيفية التي تختلف بها قاعدة كيورى عن قاعدة البرهان غير المباشر:

منطوق المبرهنة الثالثة للصياغات T للنفى لكيورى:

"إن إضافة قاعدة نفى النفى[١٦] للنسق الأقل[١٧] مكافئ لعطف قاعدة ⊥[١٨] وقاعدة (ن د) [١٩] ويلزم عنه نسقٌ كلاسيكى[٢٠]" (Curry, H. 1977, p. 282).

معنى هذا – كما هو واضح في جملة التكافؤ الثانية لمنطوق القاعدة – أن إضافة قاعدة (ن د) للنسق الأقل لن تنتج النسق الكلاسيكى بل نسقًا أطلق عليه كيورى TD ويمكن أن نطلق عليه نسق الأقل–كيورى. حتى يحدث ذلك – أي استخراج المنطق الكلاسيكى– لا بد من إضافة قاعدة ⊥ أي المنطق

الحدسى إلى قاعدة (ن د) وليس فحسب إلى المنطق الأقل. وفى جملة التكافؤ الأولى من منطوق القاعدة، نجد أن نفى النفى – الذى ينتج عن البرهان غير المباشر وينتج عنه البرهان غير المباشر (كل الصيغ تحصيل الحاصل والصحيحة متكافئة في المنطق الكلاسيكى كما هو معلوم)– والنسق الأقل يفضيان إلى المنطق الكلاسيكى، وهو ما قلناه سابقًا بأن قاعدة البرهان غير المباشر تفضى إلى المنطق الكلاسيكى بمعية المنطق الأقل أى إنها تقدم أكثر مما هو ضرورى.

ومع هذا فإن قاعدة (ن د) تعد هي النظير لقاعدة الرد إلى المحال التالية:

[ق]
.
.
.
~ق
---- (ر م)
~ق

هذه القاعدة وكذلك قاعدة (ن د) (وغيرهما بالطبع) تعدان في الأدب المنطقى صورتين من صور الرد إلى المحال، وهما الصورتان اللتان اكتشفهما الجدل الإيلى بل واستخدم إقليدس صورته الكيورية (نسبة إلى كيورى) في كتابه المبادئ بكثرة (Bochenski, M.I. 1951, pp. 16-17). فإذا كان الرد إلى المحال هو الاسم الآخر للبرهان غير المباشر، فكأننا قد تخلصنا من قاعدة البرهان غير المباشر لفظًا وتركناها مفهومًا.

ولكن إذا كان ثمة قاعدة تستطيع أن تجعل من (ن د) حالة خاصة لها وتبتعد في الآن نفسه عن صور البرهان غير المباشر فإن هذه القاعدة تكون مطلبنا. والحقيقة أن سيلدين قد بين أن قاعدة (ن د) هي حالة خاصة من قاعدة أطلق عليها (كـ⊃)، وهى تعرف في الأدب المنطقى تحت اسم قانون

بيرس Peirce’s law (Seldin, P. J. 1989, p. 194)، وصورتها كما يلى:

[ق ⊂ ك]
.
.
.
ق
------- (ك⊂)
ق

على هذا النحو، لا نستطيع القول بإننا لا نزال ندور في فلك قاعدة البرهان غير المباشر.

وإذا كان لا بد لكل قاعدة تستخرج المنطق الكلاسيكى من المنطق الحدسى من تقييد فإن تقييد قاعدة سيلدين – مثلها مثل تقييد قاعدة سايدرز وفون بلاتو – هو أن تكون هي نفسها القاعدة الأخيرة في البرهان المعيارى، بعد عمل التحويلات التباديلية اللازمة (Seldin, p. J. 1989, p. 205).

ظاهرٌ أن قاعدة (ك⊂) لدى سيلدين من جهة وقاعدة البرهان غير المباشر لدى سايدرز وفون بلاتو من جهة أخرى تتكافئان. فكلا الفريقين يقيد قاعدته بأن تكون الأخيرة، وكلاهما يقوم بعمل تحويلات تباديلية حتى يصير البرهان من خلالها معياريًّا، هذا بالإضافة إلى التحويلات التبادلية على القواعد الأخرى. فإذا كان لنا أن نختار من بين القاعدتين فأيهما نختار مع كل هذا التكافؤ؟ يبدو – من وجهة نظر منطقية اشتقاقية – أن الاختيار سيكون في صالح قاعدة (ك⊂) فهى كما بين سيلدين لا تفترض أكثر مما هو ضرورى وهو ما تفترضه قاعدة البرهان غير المباشر. فإن كان لنا أن ننشىء نسقًا استنباطيًّا طبيعيًّا كلاسيكيًّا فإن الاختيار سيكون في صالح (ك⊂) أو قانون بيرس في مقابل البرهان غير المباشر.

قد يرى البعض عدم وجود أية غضاضة في استخراج المنطق

الكلاسيكى من المنطق الأقل، ومن ثم لا يعد هذا بمثابة نقص في قاعدة البرهان غير المباشر بل مزية لها إذ تنقلنا مباشرة من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكى. ولكن يفوت هذا البعض أن المنطق الأقل قد أنشىء أصلا لتفادى الحقيقة الحدسية (والكلاسيكية بالطبع) القائلة بأن أي شيء ينتج عن التناقض (Hackstaff, H.L. 1966, p. 232)، وعليه فإن المنطق الحدسى يسبق المنطق الكلاسيكى في هيراركية الحسابات المنطقية، وقاعدة البرهان غير المباشر ستلغى تلك الهيراركية، ستلغى الانتقال من المنطق الأقل إلى المنطق الحدسى ثم إلى المنطق الكلاسيكى، فكل ما سنتحصله منها هو انتقال من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكى مباشرة مما سيلغى الخصائص المميزة للمنطق الحدسى. فلو تخيلنا أنه كُشِفَ عن المنطق الأقل قبل المنطق الحدسى ثم أضفنا إليه قاعدة البرهان غير المباشر كنا ساعتئذ لن نكتشف المنطق الحدسى!

٦. خاتمة

قدمنا في هذا البحث عرضًا لأنسقة الاستنباط الطبيعى وكيفية تدرجها من الموجب إلى الأقل إلى الحدسى إلى الكلاسيكى، وكانت الإشكالية الرئيسية هي في القاعدة التي تبيح الانتقال من المنطق الحدسى إلى المنطق الكلاسيكى مع الاحتفاظ بمعيارية البراهين وعدم التفافها. لقد كانت قاعدة البرهان غير المباشر هي القاعدة الأشد ترشحًا لتكافؤها مع قاعدة نفى النفى التي أشار إليها جنتسن؛ فهى – حسب هذا الفهم – تستطيع استخراج مبرهنات المنطق الكلاسيكى من المنطق الحدسى بمعية قاعدة $\perp$ الحدسية. ولقد تساءلنا في تمهيد هذا البحث وقسمه الأول عن قدرة تلك القاعدة على حفظ معيارية البراهين في الاستنباط الطبيعى للمنطق الكلاسيكى؟ وهل هذا الحفظ بكافٍ؟ ولقد تبين لنا أنه رغم قدرتها على حفظ معيارية البراهين فإن هذا الحفظ غير كاف حيث تؤدى لدى برافيتس إلى عدم اكتمال المنطق الكلاسيكى الخاضع لتلك القاعدة بعد عمل التقييدات عليها. أضف إلى هذا أن تلك القاعدة قد

عانت من تحولات خاصة على يد سايدرز وفون بلاتو تعرضنا إليها. وفى النهاية هي تفضى من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكى مباشرة وليس من المنطق الحدسى إلى المنطق الكلاسيكى بخلاف ما اعتقد جنتسن وبرافيتس وسايدرز وفون بلاتو، وهو أمر أشار إليه كيورى وسيلدين بحق ولقد بينا السبب في ذلك. فإن كان هذا الحفظ غير كاف تبقت الإجابة عن سؤال آخر طرحناه عن إمكانية وجود قاعدة بديلة؟ كبديل كان هناك مرشحان هما قاعدة (ن حـ) لكيورى وقاعدة (كـ⊂) لسيلدين؛ ولكنا بينا أن قاعدة (ن حـ) لكيورى هي صورة أخرى من صور البرهان غير المباشر، بينما قاعدة (كـ⊂) لسيلدين فارقت البرهان غير المباشر، فهى ما يعرف بقانون بيرس، وهى إذ جعلت قاعدة (ن حـ) لكيورى حالة خاصة لها وابتعدت عن البرهان غير المباشر أصبحت خير بديل لقاعدة البرهان غير المباشر. وهكذا؛ كانت الإجابة عن سؤال إمكانية وجود بديل أن نعم؛ فقاعدة سيلدين تستجيب بالإيجاب لكافة أسئلة البحث فهى إذ تحفظ البراهين على نحو كاف تنتقل بأنسقة المنطق الطبيعى على نحو تدريجى من الموجب إلى الأقل إلى الحدسى إلى الكلاسيكى بخلاف قاعدة البرهان غير المباشر التي تقفز من المنطق الأقل إلى المنطق الكلاسيكى مباشرة. وفى سياق كل هذا بينا في هذا البحث ما هو القصور المنطقى الذى أشار إليه جنتسن في قاعدة نفى النفى عندما تضاف إلى الحساب البديهى بغرض إنشاء الحساب الكلاسيكى؛ وذلك أنها ستتشكل التفافًا في البرهان قارًّا فيه إذ تعبر عن تقديم ثم حذف إما لإجراء الشرط أو النفى. كذلك أوضحنا ضرورة تقييد قاعدة البرهان غير المباشر دون ترخص كما فعل برافيتس، وذلك على نهج تلميذه فون بلاتو. بينا كذلك الأساس الذى يقف خلف The Rationale تباديل سايدرز وفون بلاتو لقاعدة البرهان غير المباشر. كذلك بينا المقصد المنطقى لعبارة سيلدين بأن قاعدة البرهان غير المباشر تقدم أكثر مما هو ضرورى للمنطق الحدسى. وهو البيان الذى يتفق مع المبرهنة الثالثة للصياغات T لأنسقة النفى لدى كيورى.

الهوامش:

(١) أود أن أتقدم بالشكر لمحكم هذا البحث، حيث بفضله وتوجيهه صُكَّ هذا المصطلح حيث كنت قد اخترت التواء.

(٢) ليس هذا بإطلاق، فيمكن أن توجد بالإضافة إلى قواعد الاستنتاج بديهية أو أكثر في نسق الاستنباط الطبيعى مثل نسق فيتش على سبيل المثال (Fitch, B. F. 1952, p. 13).

(٣) انظر القسم التالى من هذا البحث من أجل نموذج له.

(٤) جدير بالذكر أن جوتلوب فريجه G. Frege (١٨٤٨–١٩٢٥) هو الآخر كان قد تبنى أيضًا بعدًا ثنائيًّا في إثبات خطوات الاستدلال في الأنسقة الأكسيوماتيكية.

(٥) انظر القسم التالى وما يليه من أجل نماذج لقواعد الاستنتاج والبراهين فى الصورة الشجرية.

(٦) كان عالم المنطق الألماني بول هيرتس P. Hertz هو أول من استخدم الشجرة، أو البراهين الشبيهة بالشجرة على حد تعبيره، كعرض للبرهان: (Schroeder-Heister, P. 2002, p. 251; von Plato, J. 2012b, p. 324).

(٧) هذا تعريف تقريبى لهذه المرحلة من البحث، انظر القسمين الثانى والثالث من هذا البحث من أجل تعريف أدق.

(٨) يقصد بالمنطق الكلاسيكى كل منطق يشتمل على المبرهنات الأساسية في كتاب رسل وهوايتهيد مبادئ الرياضيات، أو هو المنطق الذى يأخذ كبديهية أو يبرهن على قانون الثالث المرفوع. أما المنطق الحدسى فهو المنطق الذى لا يمكن البرهنة فيه على الثالث المرفوع، إضافة إلى فهم خاص لإجراء النفى. انظر القسم التالى من هذا البحث لمزيد من التفاصيل.

(٩) في أوراقه المطبوعة – كما هو معروف – برهن جنتسن على معيارية المنطق الحدسى والكلاسيكى في حسابه للمتتابعات Sequents.

(١٠)بالنسبة لطرق كتابة البرهان في صورة خطية ذات البعد الواحد فإن قاعدة تقديم العطف تأخذ فيها الشكل التالى بعامة:

١. ق   ف

٢. ك   ف

٣. ق & ك   (ت&) ١،٢

حيث يشار عادة إلى خطوات البرهان بإعطاء كل خطوة عددًا على نحو تصاعدى يكتب على يمين البرهان (وإن كان لا يدخل في عداد البرهان)، ثم يلى العدد الصيغة، ثم يليها رمز القاعدة المستخدمة وأرقام الخطوات السابقة (إن وجدت) التي تطبق عليها القاعدة. وهكذا فالبرهان السابق ذو الثلاث خطوات يتضمن مقدمتين أو صيغتين، فرضين كلتيهما، رمزنا إليهما بالرمز ف كتبناه على يسار الفرض الصيغة، وانتهينا إلى نتيجة من هذين الفرضين ألا وهى ق & ك، وأشرنا إلى القاعدة المستخدمة في استنتاجها ألا وهى (ت&) وإلى أرقام السطور السابقة المستخدمة في التطبيق. وللقارئ أن يقيس سائر القواعد والبراهين الشجرية في هذا البحث على ذلك النحو الخطى، حيث إن البحث الحالي يهتم بالبراهين الشجرية فقط، وليس هدفه إجراء مقارنة بينها وبين البراهين الخطية. وتوجد صياغات عديدة للبراهين الخطية – مثل صياغات ياسكوفسكى وكواين وسبز التي أشرنا لها سابقًا في القسم الأول – لعل أبسطها صياغة فيتش في (Fitch, F. B.; 1952). وبالعربية: (د. أحمد أنور أبو النور: المنطق الطبيعى: دراسة في نظرية الاستنباط الطبيعى، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع، ١٩٣٩).

(١١)انظر هذه الشروط في: (von Plato, J. 2013, ch. 8).

(١٢)هذه المقاييس فصلها وزادها صقلًا داج برافيتسً، انظر: (prawitz, D. 1965, pp. 25-29).

(١٣)الصيغة الذرية هي أصغر صيغة سليمة في معجم النسق المنطقى تحت الدراسة، ولا يدخلها التركيب، ففي منطق العبارات تعد الصيغ ق، ك، ... صيغًا ذرية، وفى منطق المحمول تعد الصيغ **م** س ، **م** س ص ، **م أ ب ج** صيغًا ذرية (حيث ترمز **م** إلى محمول

ما، وس و ص إلى متغيرات، وأ، **ب**، **ت**، إلى ثوابت منطقية). ولعل القارئ قد لاحظ إننا نكتب المحمول يمين المتغيرات والأسماء. حيث إن لغتنا الرمزية تُقرأ من اليمين.

(١٤)ومع ذلك يجب أن نستثنى قاعدة تقديم السور الكلى، حيث تند عن التحويل التباديلى .(von Plato, J. 2013, p.)

(١٥)انظر منطوق هذه القاعدة فيما يلى من هذا البحث.

(١٦)يستخدم كيورى الرمز Nk كرمز لقاعدة نفى النفى.

(١٧)يستخدم كيورى الرمز TM كرمز للمنطق الأقل.

(١٨)يستخدم كيورى الرمز Nj كرمز لهذه القاعدة.

(١٩)يستخدم كيورى الرمز Nd كرمز لقاعدته.

(٢٠)يستخدم كيورى الرمز Pk للإشارة إلى أنسقة كلاسيكية مغايرة.

المراجع

1.Bochenski, M. I. (1951) *Ancient Formal Logic*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

2.Carnap, R. (1937) *Logical Syntax of Language*, A. Smeaton (trans.), London: Kegan Paul.

3.Curry, H.B. (1977) *Foundations of Mathematical Logic*, New York: Dover Publications Ink.

4.Fitch, B. F. (1952) *Symbolic Logic: An Introduction*, New York: The Ronald Press Company.

5.Gentzen, G. (1933/2008) “The Normalizations of Derivations: Dissertation. III. Chapter,” in: J. von Plato (trans.), pp. 245-257.

6.Gentzen, G. (1934-1935/1969) “Investigations Into Logical Deduction,” in G. Gentzen (1969), pp. 68-131.

7.Gentzen, G. (1969) *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. Szabo (ed.), North-Holland, Amsterdam.

8.Glavenco, V. (1929/1998) “On Some Points of the Logic of Mr. Brouwer,” in: P. Mancosu (ed.), 1998, pp. 301-305.

9.Hackstaff, H. L. (1966) *Systems of Formal Logic*, Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

10.Heyting, A. (1930a/1998) “On Intuitionistic Logic,” in: P. Mancouso (ed.), 1998, pp. 306-310.

11.Heyting, A. (1930b/1998) “The Formal Rules of Intuitionistic Logic,” in: P. Mancouso (ed.), 1998, pp. 311-327.

12.Mancosu, p. (ed.) (1998), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Oxford University Press.

13.Pelletier, J. F. & Hazen, P. A. (2012) “A History of Natural Deduction.” In: D. M. Gabbay, F. J. Pelletier and J. Woods (eds), *Handbook of the History of Logic*, Vol. 11: Logic: A History of General Concepts, Elsevier B.V., pp. 341-

14.Prawitz, D. (1965) *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Stockholm: Almqvist & Wiksell.

15.Schroeder-Heister, P. (2002) “Resolution and the Origins of Structural Reasoning: Early Proof-Theoretic Ideas of Hertzand

Gentzen," in: *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 8, No. 2, pp. 246-265.

16. Seldin, P. J. (1989) "Normalization and Excluded Middle, I." in: *Studia Logica*, Vol. 48, No. 2, pp. 173-217.
17. Siders, A. & von Plato, J. (2012) "Normal Derivability in Classical Natural Deduction," in: *The Review of Symbolic Logic*, Vo. 5, No. 2, pp. 205-211.
18. von Plato, J. (2008) "Gentzen's Proof for Normalization of Natural Deduction," in: *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vo. 14, No. 2, pp. 240-257.
19. von Plato, J. (2012) "Gentzen's Proof Systems: Byproducts In A Work Of Genius," in: *The Bulletin Of Symbolic Logic*, Vol. 18, No. 3, pp. 313-367.
20. von Plato, J.(2013) *Elements of Logical Reasoning*, Cambridge: Cambridge University Press.
21. Yuuki, A. (1994) "A Normalization-Procedure For The First Order Classical Natural Deduction With Full Logical Symbols," in: *Tsukuba J. Math*, Vol. 19 No. 1. Pp. 153-162.